DS n°2 : Calcul, complexes

Durée : **4h**. Calculatrices non autorisées
Le soin et la clarté de la rédaction pourront faire varier la note de ± 1 point.

Exercice 1 : Inéquation à paramètre

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E_m) \quad : \quad \sqrt{x^2 + mx + 4} < x + 1$$

1) Déterminer selon les valeurs de m, le domaine de définition (ou d'existence) de (E_m).

2) Résoudre (E_m) dans le cas $m = -4$.

3) Résoudre (E_m) dans le cas $m = 5$.

Problème 1 : Méthode de Cartan (version complexe)

On considère deux complexes non nuls p et q, ainsi que l'équation (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E) : \quad z^3 + pz + q = 0$$

On considère aussi l'équation (P) suivante d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$:

$$(P) : \quad Z^2 + qZ - \frac{p^3}{27} = 0$$

Soit U, V les racines complexes de (P). Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $u^3 = U$.

1) Déterminer UV et $U + V$.

2) Dans cette question uniquement, on suppose $U = 2 + 2i$. Déterminer toutes les valeurs possibles de u.

3) Montrer que $u \neq 0$. Dans la suite du problème, on pose $v = \dfrac{-p}{3u}$.

4) Calculer $u^3 v^3$. En déduire que $v^3 = V$.

5) En déduire la valeur de $u^3 + v^3$.

6) Montrer que $u + v$ est solution de (E).

7) On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Montrer que $ju + j^2 v$ et $j^2 u + jv$ sont aussi solutions de (E).

8) Application 1 : on prend $p = -3$ et $q = 1$.

- **a)** Calculer U, V puis u et v.
- **b)** En déduire les solutions de $z^3 - 3z + 1 = 0$.

9) Application 2 : on cherche les solutions de l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{C}$

$$(EQ) : \quad x^3 + (6 + 3i)x^2 + (6 + 12i)x - 3 + 8i = 0$$

- **a)** On pose $z = x + a$ avec $a \in \mathbb{C}$. Trouver a tel que z vérifie une équation du type $z^3 + pz + q = 0$. Déterminer p et q.
- **b)** Résoudre (EQ).

Exercice 2 : un peu de trigonométrie

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$S(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(2kx) \qquad \text{et} \qquad C(x) = \sum_{k=0}^{n} k\cos(kx)$$

1) Soit $p, q \in \mathbb{R}$. Donner la formule trigonométrique de $\sin p \sin q$.

2) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{2ikx}$.

3) En déduire $S(x)$. On simplifiera le résultat en utilisant la question 1.

4) Exprimer $C(x)$ en fonction de $S(x)$ ou de ses dérivées. On ne fera pas le calcul explicite.

Problème 2 : Sommes de Newton

Pour tout cet exercice, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. On pose également

$$S_{n,p} = \sum_{k=1}^{n} k^p$$

1) Donner la valeur de $S_{n,0}$, $S_{n,1}$ et $S_{n,2}$.

2) Exprimer $S_{n+1,p+1} - S_{n,p+1}$ en fonction de n et p.

On suppose dans le reste du problème que $p \in \mathbb{N}^*$.

3) Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{p+1} \binom{p+1}{i} S_{n,i} = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^{p+1} - n$$

4) En déduire que

$$\sum_{i=1}^{p} \binom{p+1}{i} S_{n,i} = (n+1)^{p+1} - (n+1)$$

5) En utilisant la question précédente, exprimer $S_{n,p}$ en fonction de $S_{n,1}, \cdots, S_{n,p-1}$ (ainsi que n et p).

6) Déterminer $S_{n,3}$.

Dans une boîte de nuit, un homme complexe va voir une femme réelle et lui dit : tu viens dans $\mathbb{C}$?